С.К. Соболев

Лекции по линейной алгебре

(краткий конспект)

Лекция 2. *Подпространства линейного пространства. Ранг системы векторов, связь с рангом матрицы. Линейная оболочка. Примеры. Евклидово пространство, аксиомы и примеры. Норма вектора. Неравенство Коши – Буняковского и неравенство треугольника. Ортогональность векторов. Линейная независимость ортогональной системы ненулевых векторов. Ортонормированный базис евклидова пространства. Вычисление скалярного произведения и нормы вектора в ортонормированном базисе.*

2.1. Подпространства линейного пространства. Подмножество S линейного пространства L называется его ***подпространством***, если S само по себе относительно тех же операций сложения и умножения на число тоже образует линейное пространство. Обозначение: $S \sqsubset L$.

Для того, чтобы подмножество $S \subset L$ было подпространством, необходимо и достаточно, чтобы S содержало нулевой вектор и было замкнуто относительно сложения векторов и умножения из на любое вещественное число:

$$S \sqsubset L \Leftrightarrow (\boldsymbol{0} \in S)\,\&\,(\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L)(\forall \lambda \in \mathbf{R})\big(\boldsymbol{x} \in S,\, \boldsymbol{y} \in S \Rightarrow \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in S \,\&\, \lambda \boldsymbol{x} \in S\big)$$

Каждое линейное пространство L имеет как минимум два тривиальных подпространства: нулевое $\{\boldsymbol{0}\}$ (состоящее только из нулевого вектора) и само пространство L.

Очевидно, что если $L_1 \sqsubset L_2$, то $\dim L_1 \le \dim L_2$.

Примеры. (1) $\boldsymbol{V}_\pi \sqsubset \boldsymbol{V}$;

(2) $\boldsymbol{V}_\ell \sqsubset \boldsymbol{V}_\pi \Leftrightarrow \ell \,||\, \pi$ (прямая ℓ параллельна плоскости π);

(3) $\mathbf{R}^2 \not\sqsubset \mathbf{R}^3$, поскольку даже $\mathbf{R}^2 \not\subset \mathbf{R}^3$. Но если S состоит из всех трехмерных арифметических векторов, у которых третья компонента равна нулю, то $S \sqsubset \mathbf{R}^3$.

(4) Пусть дана система произвольных уравнений с n неизвестными. Тогда каждое её частное решение есть упорядоченный набор из n чисел, т.е. арифметический n-мерный вектор – элемент $\mathbf{R}^n$. Множество S всех решений этой системы в общем случае есть **подмножество** $\mathbf{R}^n$. Если же система состоит из **линейных однородных** уравнений, то множество S_o всех решений системы является **подпространством**: $S_o \sqsubset \mathbf{R}^n$ (поскольку, как мы знаем, любая линейная комбинация частных решений однородной СЛАУ также является её частным решением). Размерность подпространства S_o – пространства решений однородной СЛАУ – равна $\dim S_o = n - \mathrm{rg}(A) = k$, где A – матрица системы однородных линейных уравнений. Базис $\varphi = \{F_1, ..., F_k\}$ этого подпространства S_o называется **фундаментальной системой решений** однородной СЛАУ. Каждое частное решение $X \in S_o$ однородной системы однозначно разлагается по базису φ:

$$X = c_1 F_1 + ... + c_k F_k \qquad (**)$$

где $c_1, ..., c_k \in \mathbf{R}$, потому запись (**) есть **структура** (т.е. вид) **общего решения однородной системы линейных уравнений**.

2.2. Ранг системы векторов, связь с рангом матрицы. Пусть дана произвольная совокупность D векторов произвольного линейного пространства L, $D \subset L$ (D не обязательно конечно и не обязательно подпространство). ***Базой*** в D называется такое упорядоченный набор линейно независимых векторов $\alpha = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_k\} \subset D$, что любой вектор $\boldsymbol{b} \in D$ можно выразить через α: $\boldsymbol{b} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + ... + \lambda_k \boldsymbol{a}_k$ также легко доказывается, что такое представление единственно, также можно доказать, что все базы множества содержат одинаковое число векторов.

Определение. Рангом совокупности векторов D называется наибольшее количество линейно независимых векторов множества D,оно обозначается $\mathrm{rg}\, D$.

Теорема. *Ранг совокупности векторов равен количеству векторов (любой) его базы.*

Теорема. *Ранг конечной совокупности из m арифметических векторов пространства $\mathbf{R}^n$ равен рангу матрицы (размером $m \times n$ или $n \times m$), составленной из этих векторов.*

Теорема. *Если D – подпространство, то* $\mathrm{rg}\, D = \dim D$.

Напомним некоторые понятия из теории матриц.
Строка матрицы называется ***нулевой***, если в ней все элементы равны нулю. ***Выделенным*** элементом ненулевой строки матрицы называется первый слева не равный нулю элемент этой строки. Матрица называется ***ступенчатой***, если её нулевые строки (если они есть) находятся в самом низу, а номера столбцов отмеченных элементов ненулевых строк возрастают с увеличением номера строки.
Пример. Ниже приведены матрицы A, B и C в которых отмеченные элементы заключены в кружок, матрицы B и С ступенчатые, а матрица A нет.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теорема. *Каждую прямоугольную матрицу с помощью элементарных преобразований строк можно привести к ступенчатому виду (с помощью алгоритма Гаусса).*
Определение. Матрица называется ***единично-ступенчатый***, если она ступенчатая, все выделенные элементы в ней равны единице, а над каждым выделенном элементов тоже стоят нули. Вышеприведенные матрицы A и B не являются единично ступенчатыми, а матрица C является. Если квадратная матрица единично ступенчатая и не вырождена, то она просто единичная.
Теорема. *Каждую прямоугольную матрицу с помощью элементарных преобразований строк можно привести к единично-ступенчатому виду (с помощью алгоритма Гаусса–Жордана). Эта единично ступенчатая матрица определена однозначно.*
Именно эти алгоритмом мы пользовались в первом семестре, когда для данной невырожденной матрицы A находили обратную матрицу: Элементарные преобразования обладают следующим важным свойством:
Теорема. *Элементарные преобразования строк матрицы не влияют на линейную зависимость её столбцов (и наоборот, естественно, тоже).*
Это значит, что если столбцы матрицы были линейно независимы, то останутся таковыми после элементарных преобразований строк, а если они были зависимы, и, скажем, четвертый столбец был равен сумме первых трех столбцов этой матрицы, то это соотношение сохранится после любых элементарных преобразований строк этой матрицы.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть у нас дана конечная система арифметических векторов $D=\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_m\}\subset\mathbf{R}^n$. Надо:
(1) найти ранг этой системы векторов $\operatorname{rg} D=k$;
(2) найти какую-нибудь базу β совокупности D (состоящую из k векторов $\boldsymbol{a}_{i_1},\dots,\boldsymbol{a}_{i_k}\in D$)
(3) Разложить по этой базе векторы из D, не входящие в базу.
Для решения этой задачи надо:
А) записать данные арифметические векторы в виде столбцов матрицы А размером $n\times m$.
Б) Привести с помощью с помощью элементарных преобразований строк данную матрицу к единично-ступенчатому виду A^E.
В) Ранг $\operatorname{rg} D=\operatorname{rg} A=\operatorname{rg} A^E$ равен количеству ненулевых строк последней матрицы.
Г) Номера столбцов матрицы A^E, содержащих выделенные элементы – это номера векторов искомой базы.
Д) Числа, стоящие в других столбцах, и есть коэффициенты разложения по базе остальных векторов совокупности D.
Пример. Пусть нам была дана совокупность D из каких-то пяти четырехмерных арифметических векторов $D=\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_5\}\subset\mathbf{R}^4$, мы составили из них матрицу A размером 4×5, которую привели к единично ступенчатому виду A^E с помощью элементарных преобразований строк:

$$A \sim A^E = \begin{pmatrix} ① & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & ① & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & ① & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда, $\operatorname{rg} D = 3$, базу образуют, например, векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{a}_4$, и $\boldsymbol{a}_3 = 3\boldsymbol{a}_1 + 5\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_5 = \boldsymbol{a}_1 + 4\boldsymbol{a}_2 - 2\boldsymbol{a}_4$.

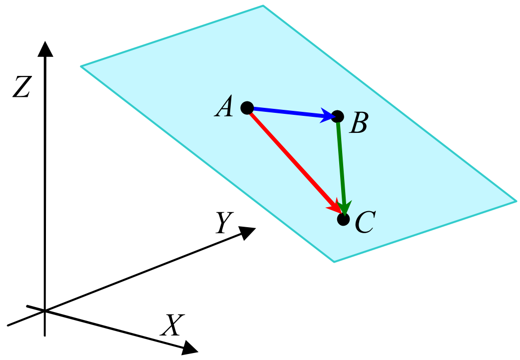
2.3. Линейная оболочка. Пусть дана совокупность D векторов произвольного линейного пространства. Её линейной оболочкой называется множество всех конечных линейных комбинаций векторов из *D*, она обозначается $S(D)$. В частности, если *D* конечна, $D = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_m\}$, то её линейная оболочка – это

$$S(\boldsymbol{a}_1; \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n) = \{\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + ... + \lambda_m\boldsymbol{a}_m \mid \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m \in \mathbf{R}\}.$$

Теорема (основное свойство линейной оболочки). *Линейная оболочка любой совокупности D векторов линейного пространства L является подпространством L, размерность этого подпространства равна рангу системы векторов D*:

$$D \subset L \Rightarrow S(D) \sqsubset L \text{ и } \dim S(D) = \operatorname{rg} D.$$

Пример. Пусть в (обычном нашем трехмерном) пространстве даны три точки *A*, *B* и *C*, не лежащие на одной прямой. Геометрические векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$ компланарны и поэтому линейно зависимы, а ранг системы этих векторов равен 2. Линейная оболочка векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$ состоит из всех линейных комбинаций этих векторов и поэтому совпадает с векторным пространством $\boldsymbol{V}_{(ABC)}$ всех геометрических векторов (параллельных) плоскости *ABC*, размерность этого пространства тоже равна 2.



2.4. Евклидово пространство, аксиомы и примеры.

Евклидово пространство – это линейное пространство, в котором задано ещё одно действие, которое каждой паре векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in E$ ставит в соответствие некоторое вещественное число – их ***скалярное произведение***, обозначаемое $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. При этом для любых векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in E$ и произвольного числа $\lambda \in \mathbf{R}$ должны выполняться следующие 4 свойства (***аксиомы*** евклидова пространства):

E1) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$;

E2) $(\boldsymbol{a}, (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$;

E3) $(\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$;

E4) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \ge 0$, причем $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

Примеры . (1) В пространстве *V* геометрических векторов скалярное произведение вводится по формуле $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cos(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})$. Аксиомы (E1) – (E4) верны, поскольку являются простейшими свойствами скалярного произведения геометрических векторов.

(2) в арифметическом пространстве $\mathbf{R}^n$ скалярное произведение двух векторов $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n), \boldsymbol{b} = (b_1; b_2; \ldots; b_n) \in \mathbf{R}^n$ можно ввести по формуле

$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \underset{def}{=} a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$.Проверим, например, аксиому Е4:

В самом деле, $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geq 0$, причем,

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) = 0 \Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}.$$

В пространстве функций $\boldsymbol{C}_{[a;\,b]}$, непрерывных на отрезке $[a;b]$, скалярное произведение можно ввести так. Если $f(x)$ и $g(x) \in C_{[a;\,b]}$, то $\left(f(x), g(x)\right) \underset{def}{=} \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx$.

Замечание [для лектора**]. Определенный интеграл** (под видом просто **интеграла**) изучался в школе в 11 классе. На параллельной дисциплине ***Интегралы и ДУ*** студенты будут проходить определенный интеграл на только 5-6 неделе.

2.5. Норма вектора. Если в пространстве геометрических векторов изначально известно понятие длины вектора, то в произвольном линейном пространстве понятие длины «вектора» (в качестве которого может выступать и многочлен, и матрица) отсутствует. Аналогом служит понятие нормы.

Определение. ***Нормированным пространством*** называется линейное пространство L, в котором для каждого вектора $\boldsymbol{a} \in L$ однозначно определено число $\|\boldsymbol{a}\| \in \mathbf{R}$, называемое ***нормой*** вектора $\boldsymbol{a}$, удовлетворяющая для любых $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in L$ b $\lambda \in \mathbf{R}$ следующим трем свойствам (аксиомам нормы):

N1) $\|\boldsymbol{a}\| \geq 0$, причем, $\|\boldsymbol{a}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = 0$ **;**

N2) $\|\lambda \boldsymbol{a}\| = |\lambda| \cdot \|\boldsymbol{a}\|$ **(**здесь $|\lambda|$ – обычная абсолютная величина числа λ **);**

N3) $\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|$ **(неравенство треугольника).**

В арифметическом пространстве $\mathbf{R}^n$ норму вектора $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n)$ можно ввести разными способами:

(1) **октаэдрическая** норма $\|\boldsymbol{a}\|_1 = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$.

(2) **шаровая** норма $\|\boldsymbol{a}\|_2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$;

(3) **кубическая** норма $\|\boldsymbol{a}\|_\infty = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|\}$;

Например, если $n = 4$ и $\boldsymbol{a} = (1; -2; 3; -4) \in \mathbf{R}^4$, то

$$\|\boldsymbol{a}\|_1 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10,\ \|a\|_2 = \sqrt{1 + 4 + 9 + 16} = \sqrt{30},\ \|a\|_\infty = 4 .$$

Названия этих норм происходит от формы, какую имеет в пространстве $\mathbf{R}^3$ множество, заданное неравенством: $\|\boldsymbol{x}\| \leq a$, где $\boldsymbol{x} = (x_1; x_2; x_3)$. В первом случае это октаэдр, во втором шар, в третьем – куб (с центром в начале координат во всех случаях).

(Можно доказать, что обе эти нормы удовлетворяют всем трем аксиомам нормы).

Для нас наибольший интерес представляет норма в произвольном евклидовом пространстве, также называемая ***евклидовой***.

Определение. ***Нормой*** вектора $\boldsymbol{a}$ в евклидовом пространстве E называется квадратный корень из скалярного произведения вектора на себя, т.е. квадратный корень из его скалярного квадрата:

$$\|\boldsymbol{a}\|_E \underset{def}{=} \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$$

Мы далее покажем, что евклидова норма удовлетворяет все трем аксиомам нормированного пространства.

(N1). Вытекает из аксиомы (Е4) евклидова пространства.

(N2) $\|\lambda \boldsymbol{a}\| = \sqrt{(\lambda \boldsymbol{a}, \lambda \boldsymbol{a})} = \sqrt{\lambda^2 (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} = \sqrt{\lambda^2} \cdot \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} = |\lambda| \cdot \|\boldsymbol{a}\|$.

Перед проверкой (N3) сначала докажем одно важное неравенство

2.6. Неравенство Коши – Буняковского и неравенство треугольника.

Теорема (**неравенство Коши – Буняковского – Шварца**). Для любых векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ произвольного евклидова пространства E выполняется неравенство

$$|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})| \le \|\boldsymbol{a}\|\cdot\|\boldsymbol{b}\|.$$

Доказательство. Мы докажем равносильное неравенство

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2 \le \|\boldsymbol{a}\|^2\cdot\|\boldsymbol{b}\|^2 = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})^2\cdot(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})^2. \qquad (**)$$

Если $\boldsymbol{a}=0 \Rightarrow (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})=0$, то неравенство (**) очевидно. Иначе рассмотрим вектор $\boldsymbol{c}(t)=t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, где $t\in\mathbf{R}$. Очевидно, что $\|\boldsymbol{c}(t)\|^2\ge 0$ для любого $t\in\mathbf{R}$. Но

$$\|\boldsymbol{c}(t)\|^2 = (t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\, t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \alpha\cdot t^2+\beta\cdot t+\gamma \ge 0 \text{ для всех } t\in\mathbf{R},$$

где $\alpha=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})>0,\ \beta=2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),\ \gamma=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})$. Это возможно, только если дискриминант этого квадратного трехчлена не положителен:

$$D=\beta^2-4\alpha\gamma\le 0 \Leftrightarrow 4(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2-4(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})\le 0 \Leftrightarrow (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2\le(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}),$$

что и требовалось доказать.

Теперь докажем **N3** (неравенство треугольника):

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|\le\|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\| \Leftrightarrow \|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2\le(\|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|)^2 \Leftrightarrow (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\,\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\le\|\boldsymbol{a}\|^2+2\|\boldsymbol{a}\|\cdot\|\boldsymbol{b}\|+\|\boldsymbol{b}\|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})+2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})\le(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})+2\|\boldsymbol{a}\|\cdot\|\boldsymbol{b}\|+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\le\|\boldsymbol{a}\|\cdot\|\boldsymbol{b}\|$$

В произвольном евклидовом пространстве можно вычислить «угол» между ненулевыми векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ по формуле:

$$(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}) = \arccos\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{a}\|\cdot\|\boldsymbol{b}\|}$$

Это выражение имеет смысл, т.к. в силу неравенства Коши – Буняковского аргумент арккосинуса в этой формуле по модулю не превосходит единицы.

Примеры. В пространстве $\boldsymbol{V}$ евклидова норма геометрического вектора $\boldsymbol{a}$ совпадает с его длиной $\|\boldsymbol{a}\|=|\boldsymbol{a}|$.

В арифметическом пространстве $\mathbf{R}^n$ евклидова норма вектора $\boldsymbol{a}=(a_1;a_2;\ldots;a_n)$ равна $\|\boldsymbol{a}\|_E=\sqrt{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}=\|\boldsymbol{a}\|_2$ и, следовательно, совпадает с «шаровой» нормой в $\mathbf{R}^n$.

Наконец, в пространстве $\boldsymbol{C}_{[a;\,b]}$ норма функции $f(x)$ вычисляется по формуле

$$\|f(x)\|_{[a;\,b]}=\sqrt{(f(x),f(x))}=\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}$$

Пример. В Евклидовом пространстве $C_{[0;\,1]}$ найти «угол» между функциями $f(x)=x^2$ и $g(x)=x-1$.

Решение. Сначала найдем скалярное произведение $(f(x),g(x))$ и нормы $\|f(x)\|,\ \|g(x)\|$:

$$(f(x),g(x))=\int_0^1 x^2(x-1)\,dx=\int_0^1(x^3-x^2)\,dx=\left(\tfrac14x^4-\tfrac13x^3\right)\Big|_0^1=-\frac{1}{12};$$

$$\|f(x)\|=\sqrt{(f(x),f(x))}=\sqrt{\int_0^1(x^2)^2dx}=\frac{1}{\sqrt5},$$

$$\|g(x)\|=\sqrt{(g(x),g(x))}=\sqrt{\int_0^1(x-1)^2dx}=\sqrt{\int_0^1(x^2-2x+1)\,dx}=\frac{1}{\sqrt3}$$

Поэтому косинус искомого «угла» φ равен:

$$\cos\varphi=\frac{(f,g)}{\|f\|\cdot\|g\|}=-\frac{\sqrt5\cdot\sqrt3}{12}=-\frac{\sqrt{15}}{12}=-0{,}323\ldots,$$

а сам угол в градусах

$$\varphi = \arccos(-0,323) \cong 108,8^\circ.$$

Упражнение. Запишите, как будут выглядеть неравенства Коши – Буняковского и треугольника в евклидовых пространствах: (а) $\mathbf{R}^n$; (б) $C_{[a;\,b]}$.

Замечание. В вышеуказанных пространствах скалярное произведение можно ввести и другим способом. Например, в пространстве V геометрических векторов

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})_\lambda = \lambda \cdot |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cos(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}),$$

где λ – произвольная положительная константа. Тогда норма геометрического вектора $\boldsymbol{a}$ будет вычисляться по формуле $\|\boldsymbol{a}\|_\lambda = \sqrt{\lambda}\,|\boldsymbol{a}|$.

В пространстве $\mathbf{R}^n$ скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n)$, $\boldsymbol{b} = (b_1; b_2; \ldots; b_n) \in \mathbf{R}^n$ можно ввести с «весами»:

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{p}} = p_1 a_1 b_1 + p_2 a_2 b_2 + \ldots + p_n a_n b_n,$$

где $\boldsymbol{p} = (p_1; p_2; \ldots, p_n)$ – фиксированный арифметический ***вектор весов*** с положительными компонентами. Тогда норма арифметического вектора $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n)$ будет такой

$$\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{p}} = \sqrt{p_1 a_1^2 + \ldots + p_n a_n^2}.$$

Наконец, в пространстве функций, непрерывных на отрезке $[a; b]$, скалярное произведение более общим способом можно определить так:

$$\big(f(x), g(x)\big)_{p(x)} = \int_a^b p(x) f(x) g(x)\,dx$$

где $p(x)$ – фиксированная функция, непрерывная и положительная на отрезке $[a; b]$.

Упражнение. Напишите выражение для нормы функции в таком пространстве.

2.7. Ортогональность векторов.

Определение. Два вектора $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ произвольного евклидова пространства E называются ***ортогональными***, если их скалярное произведение равно нулю: $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 0$. Например, функции $f(x) = \cos x$ и $g(x) = \sin x$ на отрезке $[0; \pi]$ ортогональны:

$$(f(x), g(x)) = \int_0^\pi \cos x \cdot \sin x\,dx = \tfrac{1}{2}\int_0^\pi \sin 2x\,dx = -\tfrac{1}{4}\cos 2x \Big|_0^\pi = 0.$$

Теорема Пифагора. *Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ ортогональны, то* $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2$.

Обобщение. *Пусть n векторов* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ *попарно ортогональны, т.е.* $(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = 0$ *при* $i \ne j$.

Тогда $\|\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_n\|^2 = \|\boldsymbol{a}_1\|^2 + \|\boldsymbol{a}_2\|^2 + \ldots + \|\boldsymbol{a}_n\|^2$.

2.8. Линейная независимость ортогональной системы ненулевых векторов.

Теорема. *Если ненулевые векторы* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ *попарно ортогональны, то они линейно независимы.*

2.9. Ортонормированный базис евклидова пространства. Вычисление скалярного произведения и нормы вектора в ортонормированном базисе.

Определение. Базис $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, .., \boldsymbol{e}_n\}$ евклидова пространства E называется ***ортонормированным***, если он состоит из попарно ортогональных векторов, норма каждого из которых равна единице.

Если есть ортогональный базис $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$, то его легко сделать ортонормированным, умножив каждый вектор $\boldsymbol{a}_i$ на число $\lambda_i = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{a}_1\|}$. Полученные векторы $\boldsymbol{e}_i = \dfrac{\boldsymbol{a}_i}{\|\boldsymbol{a}_i\|}$ будут иметь единичную норму и по-прежнему ортогональны друг другу.

Теорема. *Пусть вектор* $\boldsymbol{a} \in E$ *имеет в ортонормированном базисе* $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, .., \boldsymbol{e}_n\}$ *координаты* $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$. *Тогда*

$$x_i = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_i) \qquad (***)$$

для $i = 1, 2, ..., n$.

Теорема. *Пусть векторы* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *имеют в некотором ортонормированном базисе координаты* $(x_1; x_2; ...; x_n)$ *и* $(y_1; y_2; ...; y_n)$ *соответственно. Тогда*

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$$

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$$

Пример. Система векторов $\boldsymbol{a}_1 = (1; -1; 0), \boldsymbol{a}_2 = (1; 1; 1), \boldsymbol{a}_3 = (1; 1; -2)$ евклидова пространства $\mathbf{R}^3$ ортогональна. Нормируем её

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{a}_1\|}\boldsymbol{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1; -1; 0) = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}; -\tfrac{1}{\sqrt{2}}; 0\right),$$

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{a}_2\|}\boldsymbol{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1; 1; 1) = \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}; \tfrac{1}{\sqrt{3}}; \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$\boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\|\boldsymbol{a}_3\|}\boldsymbol{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1; 1; -2) = \left(\tfrac{1}{\sqrt{6}}; \tfrac{1}{\sqrt{6}}; -\tfrac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

Найдем координаты $(y_1; y_2; y_3)$ вектора $\boldsymbol{b} = (3; 1; -1)$ в полученном ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$. По формуле (***)

$$y_1 = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{e}_1) = \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 = \sqrt{2};$$

$$y_2 = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{e}_2) = \frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3};$$

$$y_3 = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{e}_3) = \frac{3}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}.$$